MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG
2e année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées, vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC option mathématiques appliquées, se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- En algèbre linéaire, on introduit les espaces vectoriels de dimension finie : les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle, donc naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'espace vectoriel, comme objet abstrait n'est pas au programme. Cette définition permet de manipuler les espaces vectoriels usuels et d'introduire la notion d'endomorphisme. On introduit la notion de matrice diagonalisable et on en montre l'intérêt. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques.
  Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).
- En analyse, on introduit les intégrales généralisées qui vont permettre l'étude des variables aléatoires à densité. L'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence, s'avère particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées.
  Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.
- Dans la continuité du programme de première année, et en lien avec les résultats sur la réduction des matrices, on étudie les systèmes différentiels linéaires.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, on aborde la notion de graphe probabiliste et la chaîne de Markov associée. On introduit les variables aléatoires à densité, avec l'objectif de permettre, en fin de formation, une bonne compréhension des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.
- En informatique, l'analyse de données en tables déjà étudiée en première année se poursuit avec l'étude des bases de données relationnelles et du langage SQL.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation et dans l'étude des chaînes de Markov, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$*, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices. L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à* $\mathbf{R}^n$ *et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits. Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).*

1 - Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$. Sous-espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	

2 - Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre. Endomorphisme, isomorphisme. Composée de deux applications linéaires. Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.	Ecriture matricielle.
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Changement de base, matrice dee passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \; P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

3 - Réduction des matrices carrées

Le paragraphe est essentiellement consacré à l'introduction des matrices diagonalisables. Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée. Ces notions seront mises en situation dans l'étude pratique des suites récurrentes linéaires, de systèmes différentiels, de chaînes de Markov, et pour l'utilisation de la matrice hessienne dans les recherches d'extrema.

Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.	
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme. Application à l'étude de suites récurrentes linéaires.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On pourra introduire les systèmes différentiels en utilisant un exemple basé sur la loi de l'offre et la demande.

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle.	Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Résultat admis.
Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable de taille 2 ou 3.	L'exponentielle de matrice n'est pas au programme.
Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable. Stabilité des solutions, état d'équilibre.	
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.	On fait le lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

2 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On réécrira les croissances comparées de première année. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On remarquera le cas où f est croissante. On pourra illustrer cette partie du programme avec Python. $\boxed{\blacktriangleright}$.

c) Compléments sur les séries

L'étude des séries ne s'applique que dans le cadre de l'étude de variables aléatoires discrètes.

Convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.	Ce résultat pourra être démontré dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. On donne des exemples de sommes télescopiques.

3 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.	Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$ Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité. Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.
Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.	On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'***à l'ordre au plus 2***. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.	Unicité. Formule de Taylor-Young. Résultats admis.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x-x_0)$, avec $a_2 \neq 0$.	Exemples.
Cas des fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.	Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

4 - Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Les intégrales généralisées sont introduites dans ce programme comme outil pour l'étude des variables aléatoires à densité. Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Intégrales sur un intervalle de type $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a, +\infty[$.	$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
Linéarité, positivité, relation de Chasles.	Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.
Convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.	On pourra en déduire la convergence des séries de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$.
Extension des notions précédentes aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.	

b) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.	De même, si f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \longmapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty, a]$.
Règles de comparaison dans les cas $f \leqslant g$, $f = o(g)$ et $f \underset{+\infty}{\sim} g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.	On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$. On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a > 0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

c) Convergence absolue

Convergence absolue.	Cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.
La convergence absolue implique la convergence.	Résultat admis.
Extension aux intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$	

III - Probabilités et statistiques

1 - Statistiques bivariées

On s'appuiera dans ce paragraphe sur des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales (loi d'Okun, corrélation entre données économiques...).

Série statistique à deux variables quantitatives discrètes, nuage de points associé.	
Point moyen du nuage.	Notation $(\bar{x}, \bar{y})$.
Covariance empirique s_{xy}, formule de Koenig-Huygens.	Pour des n uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad s_{x,y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Cœfficient de corrélation linéaire empirique r_{xy}, propriétés et interprétation de ce coefficient.	$-1 \leqslant r_{x,y} \leqslant 1$ et interprétation lorsque $\lvert r_{x,y}\rvert = 1$.
Ajustement des moindres carrés, droites de régression.	On pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer. On discutera de la pertinence d'une régression linéaire selon les données observées.

2 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y$, XY.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires	$E(g(X, Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. - Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

3 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i]).$$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - **Fonctions numériques de deux variables réelles**

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.

Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.

On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.
Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < r \Rightarrow \mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.
Lignes de niveau.	Illustration sur des exemples (Cobb-Douglas etc...).

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1.
Fonctions de classe C^1.
Une fonction de classe C^1 est continue.
Opérations sur les fonctions de classe C^1.

Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$.
La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.

Gradient de f en un point.

Notation $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$.

$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$
$+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0).
Résultat non exigible.

Dérivées partielles d'ordre 2.
Fonctions de classe C^2.
Une fonction de classe C^2 est de classe C^1.
Opérations sur les fonctions de classe C^2.

Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$ où
$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y).$$

Théorème de Schwarz.

Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$,
$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y).$$

Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).

Notation $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$.
On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$. On donnera la définition d'un ensemble borné.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles.
Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.

Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.

Résultat admis.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On pourra revenir à titre d'exemple sur la détermination des coefficients de la droite de régression.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - **Probabilités**

1 - Graphes probabilistes (chaînes de Markov)

Tous les résultats de cette section seront admis.

Graphe probabiliste. Matrice de transition.	On commence par l'exemple simple d'un graphe à deux ou trois états. Les sommets du graphe sont numérotés à partir de 1.
Chaîne de Markov associée (X_n).	X_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des sommets du graphe.
Etats de la chaine de Markov.	Le n-ème état de la chaîne de Markov, noté V_n, est la matrice ligne $(P(X_n = 1), ..., P(X_n = r))$.
Si $M = (m_{i,j})$, on a la formule : $P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i)$.	Les coefficients de la matrice de transition sont des probabilités conditionnelles.
Relation de récurrence matricielle entre les états successifs de la chaîne de Markov.	$V_n = V_{n-1}M$. On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ $\mu : W \mapsto WM$ et remarquer que la matrice de μ dans la base canonique est ${}^tM$.
Etat stable.	$V = VM$. La matrice des coordonnées de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (soit ${}^tV$) est un vecteur propre de ${}^tM$ relatif à la valeur propre 1. On donnera l'interprétation probabiliste de l'état stable.

Etude sur des exemples des différents comportements possibles d'un graphe probabiliste à deux états.	Savoir-faire non exigible.

2 - Variables aléatoires à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de $\mathbf{R}$.

a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.	Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité f_X.	
Toute fonction f positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.	Résultat admis.
Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue.	En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Résultat admis.
Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de $aX + b$ $(a \neq 0)$.

b) Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Variable aléatoire centrée.	

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$. Résultat admis.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois à densité usuelles

Pour chacune de ces lois, on donnera des contextes dans lesquels on les utilise.

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi normale centrée réduite.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ On pourra démontrer en exercice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. Variance.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

3 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ dans le cas où X est à densité.

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$ Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \lvert X\rvert^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\lvert X - E(X)\rvert \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P([\lvert\overline{X}_n - m\rvert \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.	Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue. Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.	$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si : $$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$ Résultat admis. Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On observera sur des exemples la convergence en loi d'une chaîne de Markov (dont le graphe sous-jacent est complet) vers la loi décrite par son état stable.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a,b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$. Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

5 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), c'est-à-dire à en obtenir une valeur approchée, à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc de l'intention de fournir une estimation. Cette intention est garantie le plus souvent par un résultat de convergence probabiliste (lorsque n tend vers $+\infty$) vers le paramètre à estimer (convergence de l'estimateur). Ceci sort des objectifs du programme mais pourra être commenté sur les exemples proposés.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ où $\varphi(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $\theta=p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n=\varphi(X_1,\dots,X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\overline{X}_n=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. Estimateur du maximum de vraisemblance : on ne fera pas de développement théorique, mais on en expliquera le principe et on l'instanciera sur les lois de Bernoulli et de Poisson. ▶

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée. On ne considère dans ce paragraphe que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique m faisant intervenir l'estimateur $\overline{X}_n$. Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique.

Recherche d'un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$ à partir de $\overline{X_n}$ et à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.	▶
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique $\overline{S}_n=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$. ▶
Intervalle de confiance asymptotique : $P\left(\left[\overline{X}_n - t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1-\alpha$ où t_α est le quantile d'ordre $1-\dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$	Ce résultat est une conséquence direct du théorème limite central. Il n'est pas exigible en l'état. On pourra mentionner le cas particulier $\alpha=0,05$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du troisième semestre.

1 - Bases de données

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On introduira les concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés (fichier clients, gestion des stocks, gestion du personnel ...)

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire « PRIMARY KEY », clef étrangère « FOREIGN KEY », schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier « INTEGER », chaîne « TEXT ».
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.
Opérateurs arithmétiques $+$, $-$, $*$.	
Opérateurs de comparaison : =, <>, <, <=, >, >=.	
Opérateurs logiques : « AND », « OR », « NO ».	

a) Commandes exigibles

« WHERE »	
« SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table ».	Sélection de données dans une table.
« INSERT INTO nom_de_table ».	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser « VALUES (élément1, élément2,...)".
« DELETE FROM nom_de_table ».	Suppression de données d'une table.
« UPDATE nom_de_ table ».	Mise à jour de données d'une table.

« SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2 ».	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition « ON Φ »dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
« CREATE TABLE nom_de_table ».	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union « UNION », intersection « INTERSECTION », différence « EXCEPT ».

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min « MIN », max « MAX », somme « SUM », moyenne « AVG », comptage « COUNT ».

Les commandes « DISTINCT », « ORDER BY »

2 - Equations et systèmes différentiels

L'objectif est d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. On pourra dégager sur des exemples simples des notions qualitatives, mais aucune technicité n'est attendue. La discrétisation d'une équation différentielle n'est pas au programme. On pourra utiliser le solveur scipy.integrate.odeint ; la maîtrise d'un tel outil n'est pas exigible.

Représentations graphiques de trajectoires.	Sur des exemples en lien avec le programme : Interprétation des paramètres. Influence des conditions initiales. On observera le phénomène de convergence vers un équilibre.

3 - Statistiques descriptives bivariées

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites. de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer.

II - **Programme du quatrième semestre.**

1 - Chaînes de Markov

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe fini, qui sont vues en première année, ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Etat stable. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables. On observera la convergence en loi d'une chaîne de Markov (sur un graphe complet) vers son état stable.

2 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Intervalle de confiance asymptotique obtenu avec le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.	Résultat admis On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.