ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2010

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps": 8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1.

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. Montrer que le réel λ est une valeur propre de f_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q.
2. Vérifier que le réel $\lambda = 1$ est racine de Q.
3. En déduire les racines de Q ainsi que leur nombre en fonction de a.
4. Lorsque $a = 1$, l'endomorphisme f_1 est-il diagonalisable ?

II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2. \end{cases}$$

1. Prouver que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

   On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2. Montrer que e'_1 est un vecteur propre de f_a.
3. Vérifier que le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e'_2 et e'_3 est stable par f_a c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F.$$

4. Donner l'expression de la matrice T_a de l'endomorphisme f_a dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où, par convention, on pose $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 0. \\ \text{Pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2. Etablir par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

3. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de P_2 puis exprimer u_n en fonction de n.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

Tournez la page s.v.p.

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :
$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$
6. Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5**. On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \alpha. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.
3. Démontrer que pour $x > \alpha$:
$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$
   En déduire que l'espérance de X est donnée par :
$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$
   Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.
4. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé,
- E_1 l'événement : «$D_1 < D_2$», E_2 l'événement : «$D_1 = D_2$» et E_3 l'événement : «$D_1 > D_2$».

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.

Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :

- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{\text{ème}}$ partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, ..., n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.

   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3) . *On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.*

   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.

Tournez la page s.v.p.

6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n.
   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné. Plus précisément on note :

T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 ..... alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.

Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(T_1 = k)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.
2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
   (b) Calculer les probabilités $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
   (c) Prouver que, pour $k \geqslant 3$, on a :
   $$P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$
   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (e) Etablir que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.
   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
   (g) Calculer $E(T_2)$.