BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 2010 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

- On note $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. **a.** Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \quad u(S) \in \mathcal{S}_2$.

b. Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

c. Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

4. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

5. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

EXERCICE 2

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de C

1. **a.** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f.

c. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Déterminer la nature des branches infinies de C.

4. Montrer que C admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5. Tracer C. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à C en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x) \, dx$.
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

4. **a.** Établir : $\forall x \in [0\,;1], \quad f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2.$

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1}).$

c. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y), à l'aide de f', x et y.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases}$. En déduire les points critiques de F.

3. Est-ce que F admet un minimum local ?

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0\,;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $\big(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\big)$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathrm{E}(X_1)$ et sa variance $\mathrm{V}(X_1)$.

On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier : $\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_2 = k)\mathrm{P}(X_1 = n+k)$.

b. En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. a. Montrer que Δ admet une espérance $\mathrm{E}(\Delta)$ et la calculer.

b. Montrer : $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = 2\mathrm{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathrm{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $\big(X_3 > \Delta\big)$.

6. a. En déduire : $\mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\mathrm{P}(X_3 > k)$.

b. Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0\,;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0\,;+\infty[$.
On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0\,;+\infty[,\quad \mathrm{P}\big((X = k) \cap (Y \leqslant t)\big) = \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \leqslant t).$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a. Montrer : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad \mathrm{P}(Z \geqslant t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \geqslant kt)$.

b. En déduire : $\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad \mathrm{P}(Z \geqslant t) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

c. Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

★ ★ ★