BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 298

Conception : EDHEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

1) Vérifier que A n'est pas inversible.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M)=AM$$

3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et vérifier que $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

c) On pose $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3 et E_4, puis donner une base de $\operatorname{Im}(f)$.

5) a) Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.

6) Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.
Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f. En déduire que λ est valeur propre de f.

b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement « On obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1) a) Déterminer $P(X=1)$.

b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.

2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3) Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.

4) Justifier que Y suit la même loi que X.

5) a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1]\cap[Y=j]) = P(Y=j)$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i]\cap[Y=1]) = P(X=i)$.

6) Loi de $X+Y$.

a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $P(X+Y=1) = \dfrac{2}{3}$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n)=([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1])$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7) Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=grand(1,1,'uin',---,---)
x=1
if piece==0
then lancer=grand(1,1,'uin',---,---)
     while lancer==0
     lancer=---
     x=---
     end
else
   if piece==1  then x=---
   end
end
disp(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a}e^{-x^2/2a} & \text{si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3) On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y=\dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script `Scilab` demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4) a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2\, e^{-x^2/2a}$, est paire.

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5) a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X)=\frac{(4-\pi)a}{2}$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a. En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

7) On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|S_n - a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2) a) Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln\left(1+x^2\right)-2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln\left(1+x^2\right) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o\left(x^3\right)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)

6) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a,b]$. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U=grand(1,100 000,'unf',0,1)
V=log(1+U.^2)
f=------
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 \left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n dt$.

7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \le u_n \le (\ln 2)^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10) a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)^n}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln\left(1+t^2\right)} dt$$

e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner une valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1177 – D'après documents fournis