BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Lundi 7 mai 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On s'intéresse à l'évolution d'une population de petits organismes (typiquement des insectes) pendant une "saison" reproductrice de durée maximale T où $T \in \mathbb{N}^*$. Les insectes sont supposés vivre une unité de temps, au bout de laquelle ils meurent en pondant un certain nombre d'œufs. Au moment du dépôt d'un œuf, un processus chimique, la *diapause* est susceptible de se mettre en marche qui entraîne l'arrêt de maturation de l'œuf jusqu'à la saison suivante. Ainsi, à chaque date t de la saison, une génération d'insectes s'éteint, en déposant des œufs. Immédiatement, une proportion $p(t)$ de ces œufs se mettent en diapause. Les œufs qui ne sont pas entrés en diapause éclosent avant la date $t+1$, donnant naissance à une nouvelle génération d'insectes, qui s'éteindra à la date $t+1$ en déposant des œufs, etc... Comme, à la fin de la saison, tous les organismes vivants de la population meurent, hormis les œufs qui sont en diapause, ce sont ces derniers qui seront à l'origine d'une nouvelle population qui éclora à la saison suivante. Il est donc fondamental pour la survie de la lignée que les organismes adoptent une stratégie maximisant le nombre d'œufs en diapause accumulés jusqu'à la date où la saison s'achève.

Au cours du problème, on s'intéressera plus particulièrement au cas où la durée de la saison est une variable aléatoire τ pouvant prendre des valeurs entières entre 1 et T. Pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, l'événement $[\tau = t]$ signifiera donc que la saison s'arrête à la date t.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

I Modèle de population saisonnière

Dans cette question, on définit l'évolution formelle du nombre d'œufs en diapause entre les dates 0 et T.

On note $D(t)$= nombre d'œufs en diapause à la date t. Les œufs pondus à la date t qui entrent en diapause sont comptabilisés à la date $t+1$.

$N(t)$= nombre moyen d'œufs produits à la date t

$p(t)$ = proportion des œufs produits à la date t qui entrent en diapause

Par convention, la date 0 d'une saison est celle où les insectes nés des œufs en diapause de la saison précédente pondent $N(0)$ œufs. On suppose pour simplifier :

— que $N(0)$ est un entier naturel non nul.

— que tous les œufs issus de la saison précédente ont éclos et donc que $D(0) = 0$.

— que pour tout $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}, 0 < p(t) \leq 1$

Enfin, on suppose qu'à chaque date t de la saison, un individu produit en moyenne α œufs (α étant un réel strictement positif). **Par simplicité, on supposera que α reste constant pendant toute la saison.**

1)

(a) Montrer que $D(t+1) = D(t) + p(t)N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T-1$.

(b) Montrer que $N(t+1) = \alpha(1-p(t))N(t)$ pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T-1$.

2) On suppose dans cette question que $\alpha \leq 1$.

(a) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T-1$, $N(t+1) \leq N(t)$.

(b) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T-1$,

$$D(t+1) + N(t+1) \leq D(t) + N(t).$$

(c) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T$,

$$D(t) + N(t) \leq N(0).$$

(d) Montrer que pour tout entier t tel que $0 \leq t \leq T$, $D(t) \leq N(0)$.

(e) On suppose que $p(0) = 1$.

i) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq T$, $N(t) = 0$.

ii) Montrer que pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq T$, $D(t) = N(0)$.

iii) En déduire que si $\alpha \leq 1$, la meilleure stratégie adaptée à la saison est que les $N(0)$ œufs produits à la date 0 entrent en diapause immédiatement.

3) On suppose désormais $\alpha > 1$ jusqu'à la fin du problème.

On introduit maintenant τ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, T\}$ qui représente la date où s'achève la saison. On suppose que pour tout $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $P(\tau = t) > 0$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $P(\tau \geq t) > 0$. On définit alors $H(t) = P_{[\tau \geq t]}(\tau = t)$.

(b) Montrer que $H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geq t)}$.

(c) Montrer que $H(T) = 1$.

(d) Calculer $H(t)$ pour $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ si τ suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

(e)

i) Soient T réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T$ tels que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T = 1$. Par convention, on pose $\lambda_0 = 0$. Soient $q_1 = \lambda_1, q_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \ldots, q_T = \lambda_T - \lambda_{T-1}$.

Montrer que $(q_i)_{1 \leq i \leq T}$ définit une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

ii) Calculer $H(t)$ si τ suit la loi précédente.

iii) On suppose que $T \geq 2$ et de plus que pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq T-1$, on a $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \lambda_n - \lambda_{n-1}$. Montrer que $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $\{1, 2, \ldots, T\}$.

On suppose désormais que $t \mapsto H(t)$ **est croissante.** Le but est maintenant de trouver une stratégie adéquate pour maximiser la quantité $E(\ln D(\tau))$. On va commencer par regarder un exemple simple.

4) On suppose ici que $T = 2$, que H est donnée par $H(1) = \frac{1}{2}$ et $H(2) = 1$ et que $\alpha = 4$.

(a)

i) Déterminer $P(\tau = 1)$.

ii) Quelle est la loi de τ ?

(b) Montrer que pour $D(1)$ et $N(1)$ donnés, $D(2)$ est maximum pour $p(1) = 1$.

(c) On suppose $p(1) = 1$. Montrer que

$$E(\ln D(\tau)) = \frac{1}{2} \ln \left((4 - 3p(0))\, N(0) \right) + \frac{1}{2} \ln(p(0) N(0)).$$

(d) Construire le tableau de variations sur]0,1] de la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln \left((4 - 3x)\, N(0) \right) + \frac{1}{2} \ln(N(0) x).$$

(e) Déterminer $p^*(0)$ qui maximise $E(\ln D(\tau))$.

II Transformation du problème

Par convention, on conviendra que si h **est une fonction numérique définie sur** $\{0, 1, 2, \ldots, T\}$, on a

$$\sum_{t=1}^{0} h(t) = 0.$$

5) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T\}$, $D(t) + N(t) > 0$.

On pose

$$X(t) = \frac{D(t)}{D(t) + N(t)}.$$

6) Montrer que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$,

$$X(t+1) = \frac{p(t) + (1 - p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1 - p(t)) + (1 - \alpha)(1 - p(t))X(t)}.$$

7) Soit $\xi \in [0, 1]$ fixé. Pour $x \in [0, 1]$, on pose

$$\psi_\xi(x) = \frac{x + (1 - x)\xi}{x + \alpha(1 - x) + (1 - \alpha)(1 - x)\xi}.$$

(a) Montrer que ψ_ξ est croissante sur $[0, 1]$.

(b) Calculer $\psi_\xi(1)$.

(c)

i) Calculer $\psi_\xi(0)$. On pose désormais

$$A(\xi) = \psi_\xi(0).$$

ii) Montrer que que pour tout $t \in \{0, 1, 2, \ldots, T-1\}$, $A(X(t)) \leq X(t+1) \leq 1$.

iii) Montrer que $\xi \mapsto A(\xi)$ est croissante sur [0,1].

8) Justifier l'égalité de variables aléatoires :

$$D(\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau-1)} \cdot \frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2)} \cdot \ldots \cdot \frac{D(2)}{D(1)} \cdot \frac{D(1)}{N(0)} . N(0)$$

On pose $\hat{R}(0) = \ln \dfrac{D(1)}{N(0)}$ et $\hat{R}(t) = \ln \dfrac{D(t+1)}{D(t)}$ pour $1 \leq t \leq T-1$.

9)

(a) Montrer que

$$E(\ln D(\tau)) = \ln(N(0)) + E\Big(\hat{R}(0) + \sum_{t=1}^{\tau-1} \hat{R}(t)\Big).$$

(b) Montrer que $\dfrac{D(1)}{N(0)} = \dfrac{\alpha X(1)}{1 + (\alpha - 1) X(1)}$.

(c) Montrer que $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha X(t+1)}{X(t)[1 + (\alpha-1)X(t+1)]}$ pour $1 \leq t \leq T-1$.

Pour x et y deux réels strictement positifs, on pose $u(x, y) = \ln \alpha - \ln x + \ln y - \ln(1 + (\alpha - 1)y)$.

(d) Montrer que $\hat{R}(0) = u(1, X(1))$.

(e) Montrer que $\hat{R}(t) = u(X(t), X(t+1))$ pour $1 \leq t \leq T-1$.

(f) Conclure que

$$E(\ln D(\tau)) = \ln N(0) + E\big[u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\big]$$

On voit donc que maximiser $E(\ln D(\tau))$ revient à choisir, à chaque date t telle que $1 \leq t \leq \tau - 1$, la valeur $X(t+1)$ vérifiant la contrainte $A(X(t)) \leq X(t+1) \leq 1$ de façon à rendre maximale l'expression

$$E\big[u(1, X(1)) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\big].$$

III Programmation dynamique

On expose dans cette partie les deux premières étapes de la méthode de la programmation dynamique pour résoudre le problème.

10) Soit B un événement. On note $\mathbb{I}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{I}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi de $\mathbb{I}_B$.

(b) Soient B et C deux événements. Montrer l'égalité de variables aléatoires $\mathbb{I}_{B \cap C} = \mathbb{I}_B \cdot \mathbb{I}_C$.

(c) On suppose que $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Si Y est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, on définit la **variable aléatoire** notée $\mathbf{E}_B(Y)$ par

$$\mathbf{E}_B(Y) = \frac{1}{P(B)} \mathbf{E}(Y \mathbb{I}_B) \mathbb{I}_B + \frac{1}{P(\overline{B})} \mathbf{E}(Y \mathbb{I}_{\overline{B}}) \mathbb{I}_{\overline{B}}$$

où $\overline{B}$ désigne l'événement contraire de B.

i) Soient Y et Z deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que

$$\mathbf{E}_B(Y+Z) = \mathbf{E}_B(Y) + \mathbf{E}_B(Z).$$

ii) Montrer que $\mathbf{E}(\mathbf{E}_B(Y)) = \mathbf{E}(Y)$.

iii) Montrer que $\mathbf{E}_B(Y\mathbb{1}_B) = \mathbf{E}_B(Y)\mathbb{1}_B$.

11) On suppose dans cette question que, quand l'événement $[\tau = T]$ est réalisé, $X(1), \ldots, X(T-1)$ sont connus. Comme on l'a vu précédemment, si on pose $x = X(T-1)$, le meilleur choix à faire est alors de prendre pour $X(T)$ la valeur $y^*(x, T-1) \in [A(x), 1]$ qui maximise $u(x,y)$.

(a) Montrer que $y^*(x, T-1) = 1$.

(b) Montrer que $u(x,1) = -\ln x$.

12) On suppose maintenant que, quand l'événement $(\tau \geq T-1)$ est réalisé, $X(1), \ldots, X(T-2)$ sont connus. La stratégie reste donc de choisir $X(T-1)$ et $X(T)$ de façon à maximiser $\mathbf{E}\Big(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\Big)$.

La variable aléatoire τ prend les deux valeurs $T-1$ et T avec les probabilités respectives $\mathbf{P}_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T-1)$ et $\mathbf{P}_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T)$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]} \sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1)) = \mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T)).$$

(b) Montrer que

$$\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]} \mathbf{E}_{[\tau \geq T-1]}\Big(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))\Big) = \mathbf{E}_{[\tau \geq T-1]}\Big(\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]}\, u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T))\Big).$$

(c) Montrer que

$$\mathbf{E}_{[\tau \geq T-1]}\Big(\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]} u(X(T-2), X(T-1)) + \mathbb{1}_{[\tau = T]}\, u(X(T-1), X(T))\Big) = u(X(T-2), X(T-1))\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]} + \frac{P(\tau = T)}{P(\tau \geq T-1)} u(X(T-1), X(T))\mathbb{1}_{[\tau \geq T-1]}.$$

(d) On suppose que $X(T-1)$ est donné.

i) Montrer que le meilleur choix pour $X(T)$ est 1.

ii) Montrer que pour un tel choix $u(X(T-1), X(T)) = -\ln X(T-1)$.

(e) Montrer que $\mathbf{P}_{[\tau \geq T-1]}(\tau = T) = 1 - H(T-1)$.

On veut maintenant choisir la stratégie optimale à la date $T-2$.

(f) Montrer qu'on doit choisir pour $X(T-1)$ la valeur $y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2)), 1]$ de telle sorte que

$$\phi(y) = u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1)) \ln y$$

soit maximal.

(g) Calculer $\phi'(y)$.

(h) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leq 1.$

(i) Construire le tableau de variation de ϕ dans le cas $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geq 1.$

(j) Donner la valeur de $y^*(X(T-2), T-2)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1170 – D'après documents fournis